先物売買とオプション付帯

Futures Tradings and Covered Futures Tradings with Options

上　野　皓　司
Ueno,　Koji

ABSTRACT

Returns of futures trading are random. Fluctuations of futures price can not be forecasted easily. At first possibilities of return on time horizon are examined. All courses of profit and loss are shown exhaustively on three periods. Chance of obtaining profit from random processes is very rare. The effect of option covering futures trading is analyzed on time horizon. Options increase chances to obtain profit and stabilize amount of returns.

最近日本でも株式や商品市場でオプションが売買され始めている。オプションの先進国である米国ではかなりの歴史を有し，研究も豊富である。以下の目的は先物の損益の動きとオプション付帯の効果を検討することであるが，最初に先物やオプションの価格や市場について米国でどのような研究が行われてきたかを概観する。

オプションの適正な価格については長く検討されており，Merton（1998）には Black-Scholes の 1973 年のモデル以来 25 年間のオプション価格研究の歴史に対する感想と，将来の研究方向への示唆がみられる。Black-Scholes モデルは原資産である株価が幾何学的なブラウン運動（geometric Brownian motion）に従うときヨーロピアン・プット・オプションがどのような価値を持つかを把握するための公式を提示しているが。モデルは，①権利行使価格（exercise price, or striking price），②満期までの時間（time until expiration），③株価変動率（stock volatility），についての価値の評価の偏りが指摘されており，Geske and Roll

(1984) はこの偏りの原因と程度をアメリカン・コール・オプションについて検討し，Geske and Johnson (1984) はアメリカン・プット・オプションの価値を評価する方法を検討している。

Bates (2000) は 1987 年 10 月 19 日の株式市場の崩壊以来オプション価格は Black-Scholes モデルによって計算される価格より負の方向にかたよっていると述べ，その理由として，①投資家の評価の変化，②投資家のリスク回避の変化，③市場の摩擦や組織の変化によるオプションの誤った価格付け，を推測している。過去の株式へのオプション価値の評価は原資産の配当や価格変動率の不変を想定しているが，Broadie, Detemple, Ghysels and Torrés (2000) は不確実な配当や変動率のもとでアメリカン・オプションがどのような価値を有するかを理論的に検討している。

近年現物へのオプション以外に先物へのオプションが設けられ，現物，先物，オプションの相互の動きが注目されている。Brenner, Courtadon and Subrahmanyam (1985) は先物へオプションが付帯され始めた 1980 年代半ばに現物へのオプションと先物へのオプションの価値を理論的に比較検討している。この頃現物と先物の両者にオプションが付帯可能になった商品は，金，米国財務省長期債券 (Treasury Bonds)，西ドイツマルク，S&P500 株価指数，NYSE 複合指数 (NYSE Composite Index) 等であったが，金や銀等の先物へのコール・オプションの価値は現物へのオプションより高い価値を，先物へのプット・オプションの価値は現物へのオプションより低い価値を有するはずである，と述べている。Ball and Torous (1986) は 1982 年 10 月の開設以来先物オプション市場 (futures option markets) は契約件数，取引量ともに著しく成長したと述べ，先物オプション市場の効率性を吟味している。また先物オプションの導入は先物価格変動率の事前評価 (ex ante assessment of futures price volatility) の手段を提供していると推定し，ドイツマルク，金，砂糖の先物契約について先物価格の変動率と原資産である先物契約の限月への時間的な接近との関連を検討している。

Anthony（1988）は Atrantic Richfield, Bankamerica など 25 の企業について 1982 年 1 月 1 日から 1983 年 6 月 30 日までの CBOE（Chicago Board Option Exchage）で売買されているコール・オプションとニューヨーク株式取引所（NYSE）かアメリカン株式取引所（AMEX）に上場されている原資産の株式の毎日の取引量の関連を調べ，コール・オプションの取引は原資産の株式の取引を 1 日リードしていると説明し，良いニュースについての情報を持っているオプション取引者はコール・オプションの，悪いニュースについての情報を持っているオプション取引者はプット・オプションの取引に導かれる，とも述べている。先物の売りは，①いつ（when)，②どこで（where)，③どれだけ（how much)，④何を（what)，引き渡すかについて選択の余地（flexibility）がある。これらはオプションとしては，①時間的オプション（timing option)，②場所的オプション（location option)，③数量的オプション（quantity option)，④品質オプション（quality option)，と呼ばれ，例えばシカゴ商品取引所では小麦の先物渡しは 11 種類の小麦の中から品質を選択することができるが，Boyle（1989）はこの品質オプションの先物への影響と時間的オプションとの相互作用を検討している。

Vijh（1990）は CBOE の市場の深さ（market depth）と市場の広がり（market spread）を検討している。市場の深さとは取引量の突然の増大を吸収する能力で，市場の広がりとは仲介者がすぐに取引を成立させることができる最も低い売り呼び値（lowest ask prices）と最も高い買い呼び値（highest bid prices）の差異である。Hong（2000）は先物の限月までの時間（time to maturity）との関連で先物価格の変動率（price volatility）が投資家の私的な情報によるヘッジや投機によりどのように変化するかを理論的に検討し，Wang（2002）は 1993 年 1 月から 2000 年 3 月までの S&P500 株式指数先物の変動率と需要の型の関連を分析し，正負の思いがけない投機的需要は変動率を減少させ，正負の思いがけないヘッジ需要は変動率を増大させる，と判断している。Najand（2002）は先物市場では株式指数先物（stock index futures）や株式指数先物オプション（option on stock index futures）の先行きに対する洞察が重要である，と述べ，1983 年 1 月から 1996 年 12 月までの S&P500 先物指数（S&P500 futures index）の毎日の終値価格（daily closing prices data）を 3561 系列使用し，終値価格の変動率を最も良く予測するモデルを吟味している。

現物，先物，オプションいずれもその売買は投資家の予測に基づいているが，Doukas, Kim and Pantzalis（2002）は，1976 年から 1997 年までの資料をもとに，投資家は将来の収益について最近好調であった株式を過大評価し不調であった株式を過小評価する，という最近の議論の正否を検証し，投資家の予測の誤りが多いために，このような事実を検証できなかった，と述べている。投資家の予測はかなりランダムである可能性が推測される。

株式，為替，穀物，貴金属，石油等の市場では価格の意外な変動を伴い，その変動にどのように対処するかによって利益や損失が大きく変化する。この対応の方法は多様であるが，手持ち資金に制約があれば自ずから限られた数の方法から選択されなければならず損失の可能性が大きくなるが，資金に余裕をもたせながら売買をすれば利益を上げる機会が増大する。以下では先物市場の特定商品を対象に売買による損益の可能性を検討し，オプションを付帯すれば損益がどのように変化するかを考える。

1. 0時点の取引

先物取引では売買の最小単位を 1 枚と呼び，1 枚の売買につき一定の証拠金を仲介業者に預けなければならない。例えば 1 枚が 150 万円で証拠金が 1 枚 6 万円であれば，5 枚の売り予約を購入すれば 150×5＝750 万円の購入に対し 6×5＝30 万円の証拠金を預けなければならないが，以下では十分に証拠金を仲介業者に預けていると想定し，証拠金の問題は考慮しない。

t 時点の売り予約の購入枚数すなわち売りの枚数を $A(t)$，買い予約の購入枚数すなわち買いの枚数を $B(t)$ と表す。初期時点 0 には売りか買いかいずれかを実行しなければならない。売りと買いの同時購入は手数料稼ぎとして禁じら

れており，時間を少しずらせば可能であるが，売買の明確化のために以下では1期間内には新たな売りか買いかのいずれかしか行わないと仮定する。このとき初期時点には $A(t)$ か $B(t)$ かのいずれかが行われる。

2. 1時点の取引

2回目の取引から反対売買による決済と利益の確保（＝確定利益）が可能になるが，この時点を $t=1$ とする。取引方法の選択はこの時点の価格と先行きの予測によって行われ，①現在保有している先物を反対売買する，②新たに売るか買う，のいずれかである。反対売買で決済して利益が生じるのは価格変動が手数料を越えるときである。通常は先物を購入したときには手数料は支払わず反対売買したときに1枚につき一定額 e 円を支払うために，以下では価格が $\triangle p(>e)$ 円上下に変動した時点が次の売買時点であり，この時点に決済か新たな売買を行うと想定する。もし手数料が1万円で価格が2万円変動したとき取引を行うとすれば，$e=1$ 万円，$\triangle p=2$ 万円で，1枚の確定利益は1万円である。ここで $\triangle p$ 円変動した時点に決済か新たな売買を行うという仮定を“$\triangle p$ 円ルール”と名づける。このルールのもとでは次の取引時点は常に $\triangle p$ 円変動したときである。

2−1. 価格低下時の売買方法

それでは“$\triangle p$ 円ルール”のもとで1時点に価格が $\triangle p$ 円低下し，$(p(0)-\triangle p)=p(1)$ になればより具体的にどのような売買方法が存在するであろうか。売買方法の選択は0時点が売りか買いかによって異なる。もし0時点に $A(0)$ 枚の売りで出発していれば，「高く売って低く買戻」ことにより利益が生じるために，①決済と，②新たな売買，の両方を実行することができる。ここで売りの決済枚数すなわち買戻枚数を $A(t)^{\bigstar}$，買いの決済すなわち転売枚数を $B(t)^{\bigstar}$ と表せば，①の買戻枚数 $A(1)^{\bigstar}$ は $A(0)$ 枚の範囲内で可能であり，

$$0 \leqq A(1)^{\bigstar} \leqq A(0)^{\sharp}$$

と表される。$A(0)^{\sharp}$ は0時点からの持ち越し枚数を表している。買戻枚数が0であれば利益の確定は先送りになり，②による新たな購入だけを実行することになるが，利益確定の先送りは危険を伴うために，“$\triangle p$ 円ルール”には「先物で利益が生じれば必ず利益確定のための反対売買を実行しなければならない」という条件をつけ，これを“利益確定ルール”と呼ぶ。このとき“$\triangle p$ 円ルール”と“利益確定ルール”の2条件のもとで $A(1)^{\bigstar}$ と②の $A(1)$ や $B(1)$ をどのように設定するかが問題になる。

2条件のもとでは買戻数は

$$0 < A(1)^{\bigstar} \leqq A(0)^{\sharp}$$

であり，$A(1)^{\bigstar}$ は1から $A(0)$ の範囲内のいずれかを選択しなければならないが，以下では複雑な選択をさけ，「利益が上がれば直ちに全枚数を売却する」という条件を“利益確定ルール”に含める。すなわち1枚につき一定額 $(\triangle p-e)$ 円の利益が発生すれば，この商品を先まで持ち越すことをせずすぐに利益を確定する。

上記のような2条件のもとで0時点を $A(0)$ 枚の売りで出発していれば，1時点にはどのような選択が可能であろうか。①については「高く売り安く買戻」ことにより利益が生じるために

$$0 < A(1)^{\bigstar} = A(0)^{\sharp}$$

が可能である。②について売り予約を買戻した後に売り予約を購入することは手数料の損失をともなうだけで意味がないために，売りを買戻したさいには新たな購入は買い予約 $B(1)$ だけに限定する。買い予約の購入による新たな投資は $B(1)p(1)$ である。

上記のような2条件のもとで0時点を $B(0)$ 枚の買いで出発していれば，1時点にはどのような選択が可能であろうか。①については「低く買って高く転売する」ことにより利益が生じるが価格が低下しているために転売はできない。損失を伴う売却が禁止されているもとでは①の取引はできず②の新たな購入を実行するほかはない。①が実行できないときには必ず新たになんらかの売買を

実行しなければならないという“$\triangle p$ 円ルール”の条件が存在するために，新たな売りか買いかを実行しなければならない。取引の明確化のために新たに $A(1)$ 枚の売りか $B(1)$ 枚の買いのいずれかを行うと仮定する。

価格の低下時には売り予約の保有が存在するときだけ確定利益を計上することができ，次の時点に価格が反転すると判断すれば新たに買い予約を購入する。さらに価格が低下すると予想すれば売り予約の一部だけを買戻し，買い予約の購入は行わない。価格の低下時に買い予約の保有だけが存在するときは確定利益は計上できず，さらに低下すると予想すれば新たに売り予約を購入し，反転して上昇すると予想すれば追加的に買い予約を購入する。このような売買の弾力性は保有先物の数や自由に利用できる預託金の大小によって異なるが，以下では確定利益を計上できるときには可能なすべての予約を決済し，新たな購入は決済した予約とは異なる予約に限定する。

2−2. 価格上昇時の売買方法

それでは 1 時点に価格が $\triangle p$ 円上昇し $(p(0)+\triangle p)$ 円になったときにはどのような選択が存在するであろうか。もし 0 時点に $A(0)$ 枚の売りで出発していれば,「高く売って低く買戻」ことにより利益が生じるために，①の決済はできず，②の追加売買を実行しなければならない。②は $A(1)$ 枚の売りか $B(1)$ 枚の買いである。

0 時点に $B(0)$ 枚の買いで出発していれば,「安く買い高く転売する」ことにより利益が生じるために①と②のいずれもが実行でき，①については

$$0 < B(1)^{\star} = B(0)^{\sharp}$$

が実行され，②については買いはできず $A(1)$ 枚の売りか実行される。買い予約の決済取引が行われるために②については何もしないでも取引は実行されているが，買い予約の全枚数が決済されると次の $\triangle p$ 円変動時まで利益機会をとらえることができず休止状態になるために，必ず決済とは反対の予約が購入されると仮定する。

3. ２時点の取引

１時点の価格が上下どちらに動くか不明なもとでは０時点の予想として $A(0)$ 枚あるいは $B(0)$ 枚の購入で出発する。これらの初期時点の選択は投資家の判断であり，１時点には価格の動きに対応して売買が実行されるが，２時点にも初期時点や１時点の価格の動きと投資家の判断に対応して売買が実行される。

２時点の取引は，⑴２時点価格が低下か上昇か，⑵１時点価格が低下か上昇か，⑶０時点を売りで出発か買いで出発か，⑷１時点にどのような選択をしているか，によって異なる。２時点の状況は例えば

$(A^{\triangledown}:1A^{\triangledown\blacktriangledown})A(1)^{\bigstar}=A(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

$(A^{\triangledown}:2A^{\triangledown\blacktriangledown})A(1)^{\bigstar}=A(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

と表されれば，$(1A^{\triangledown\blacktriangledown})$ は１時点に価格が低下（▽）し２時点にも価格が低下（▼）し０時点を売り A で出発した場合の第一の選択例を，$(2A^{\triangledown\blacktriangledown})$ は１時点に価格が低下（▽）し２時点にも価格が低下（▼）し０時点を売り A で出発した場合の第二の選択例を表示している。この例では両者ともに１時点までに確定純利益 $(\triangle p-e)A(0)$ 円を上げており，１時点以後投資をしなければ損失を計上することなく取引が終了する。

このような表現によって２時点の可能な選択をそれまでの選択経路すべてについて番号をつけて示せば以下のようになる。

２時点価格低下１時点価格低下のときに０時点を売りで出発すれば，

《1》 $(A^{\triangledown}:1A^{\triangledown\blacktriangledown})A(1)^{\bigstar}=A(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

《2》 $(A^{\triangledown}:2A^{\triangledown\blacktriangledown})A(1)^{\bigstar}=A(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

となり，１時点までに確定純利益 $(\triangle p-e)A(0)$ 円を上げており，１時点以後投資をしなければ損失が生じない。0時点を買いで出発すれば，

《3》 $(1B^{\triangledown}:1B^{\triangledown\blacktriangledown})B(0)^{\sharp},\ A(2)^{\bigstar}=A(1)^{\sharp}$

《4》 $(1B^{\triangledown}:2B^{\triangledown\blacktriangledown})B(0)^{\sharp},\ A(2)^{\bigstar}=A(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

《5》 $(2B^{\triangledown}:1B^{\triangledown\blacktriangledown})B(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

《6》 $(2B^{\triangledown}:2B^{\triangledown\blacktriangledown})B(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

であり，$(1B^{\triangledown})$ では 2 時点に確定利益 $A(1)(\triangle p-e)$ を生じるが，$(2B^{\triangledown})$ では 2 時点までに確定利益を計上することができない。

2 時点価格低下 1 時点価格上昇のときには，0 時点を売りで出発すれば，

《7》 $(1A^{\triangle}:1A^{\triangle\blacktriangledown})A(0)^{\sharp},\ A(2)^{\bigstar}=A(1)^{\sharp}$

《8》 $(1A^{\triangle}:2A^{\triangle\blacktriangledown})A(0)^{\sharp},\ A(2)^{\bigstar}=A(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

《9》 $(2A^{\triangle}:1A^{\triangle\blacktriangledown})A(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

《10》 $(2A^{\triangle}:2A^{\triangle\blacktriangledown})A(0)^{\sharp},\ B(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

であり，$(1A^{\triangle})$ だけが 2 時点に確定純利益 $(\triangle p-e)A(1)$ 円生じる。0 時点を買いで出発すれば，

《11》 $(B^{\triangle}:B^{\triangle\blacktriangledown})B(1)^{\bigstar}=B(0),\ A(2)^{\bigstar}=A(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

の一つの経路だけが存在し，1 時点には $(\triangle p-e)B(0)$ の，2 時点には $(\triangle p-e)A(1)$ の確定利益が生じ，もし 1 時点か 2 時点に取引を終了すれば利益だけを得ることができる。

2 時点価格上昇 1 時点価格低下のときには，0 時点を売りで出発すれば，

《12》 $(A^{\triangledown}:A^{\triangledown\blacktriangle})A(1)^{\bigstar}=A(0)^{\sharp},\ B(2)^{\bigstar}=B(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

だけの選択が存在し，この過程では 1 時点に $(\triangle p-e)A(0)$，2 時点に $(\triangle p-e)B(1)$ の確定利益を生じ，1 時点か 2 時点に取引を終了すれば利益だけを得ることができる。0 時点を買いで出発すれば，

《13》 $(1A^{\triangledown}:1A^{\triangledown\blacktriangle})B(0)^{\sharp},\ A(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

《14》 $(1A^{\triangledown}:2A^{\triangledown\blacktriangle})B(0)^{\sharp},\ A(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

《15》 $(2A^{\triangledown}:1A^{\triangledown\blacktriangle})B(0)^{\sharp},\ B(2)^{\bigstar}=B(1)^{\sharp},$

《16》 $(2A^{\triangledown}:2A^{\triangledown\blacktriangle})B(0)^{\sharp},\ B(2)^{\bigstar}=B(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

の選択が存在し，$(2A^{\triangledown})$ では 2 時点に確定利益が生じる。

2 時点価格上昇 1 時点価格上昇のときには 0 時点を売りで出発すれば，

《17》 $(1A^{\triangle}:1A^{\triangle\blacktriangle})A(0)^{\sharp},\ A(1)^{\sharp},\ A(2)^{\sharp}$

《18》 $(1A^{\triangle}:2A^{\triangle\blacktriangle})A(0)^{\sharp},\ A(1)^{\sharp},\ B(2)^{\sharp}$

《19》（$2A^{\triangle}$：$1A^{\triangle\blacktriangle}$）$A(0)^{\sharp}$, $B(2)^{\bigstar}=B(1)^{\sharp}$

《20》（$2A^{\triangle}$：$2A^{\triangle\blacktriangle}$）$A(0)^{\sharp}$, $B(2)^{\bigstar}=B(1)^{\sharp}$, $A(2)^{\sharp}$

の選択が存在し,（$2A^{\triangle}$）だけが2時点に確定純利益（$\triangle p-e)B(1)$ 円を生じ，0時点を買いで出発すれば,

《21》（$B^{\triangle}$：$1B^{\triangle\blacktriangle}$）$B(1)^{\bigstar}=B(0)^{\sharp}$, $A(1)^{\sharp}$, $A(2)^{\sharp}$

《22》（$B^{\triangle}$：$2B^{\triangle\blacktriangle}$）$B(1)^{\bigstar}=B(0)^{\sharp}$, $A(1)^{\sharp}$, $B(2)^{\sharp}$

の選択があり，1時点には（$\triangle p-e)B(0)$ の確定利益が生じ1時点に取引を終了すれば利益だけを得ることができる。

2時点終了時までに22の異なる選択経路が存在するが最悪の経路は《5》，《6》，《9》，《10》，《13》，《14》，《17》，《18》であり，これら22の経路のうち8種類の経路では0, 1, 2のすべての時点の在庫が残っている。2時点に購入した予約は3時点の価格の動きが判明するまでは当然手持ちしなければならないが，0と1時点の在庫は3時点以降に処分しなければならない。これらの8種類の経路では2時点までに1度も確定利益を上げていないために，売買を3時点以後に損失なく終了するためには3時点以後の価格の動きに対応して予約を解消したさいに損失が生じないように0, 1, 2の各時点の購入量が考慮されなければならない。

4. 経路の適正な購入量

3時点以後損失が発生しないように早急に売買を終了しなければならないときこれまでの購入量にどのような関連が存在すればよいであろうか。もし最悪の経路でそのような選択が可能であれば，他の経路では余裕をもって終了することが可能である。一例として経路《5》について検討する。

4－1. 3時点の価格低下

経路《5》は2時点末には

$$P(0)B(0)+(P(0)-\triangle P)B(1)+(P(0)-2\triangle P)A(2)$$

の予約在庫を保有しているが，もし次の3時点にも価格が低下すれば2時点の $A(2)$ に利益が生じるためにここで売買を終了することが考えられる。損失を生じることなく売買を終了するためには $B(0)$，$B(1)$，$A(2)$ の間にどのような関連がなければならないであろうか。

損益の合計額を Π で表せば，《5》の損益の合計額は

$$\Pi(2B^{\triangledown}:1B^{\triangledown\blacktriangledown}) = -(3\triangle P+e)B(0)-2(\triangle P+e)B(1) + (\triangle P-e)A(2)$$

であり，ここで売りと買いの表現を除去し，A と B をいずれも X で表示すれば，損益は

$$\Pi(2B^{\triangledown}:1B^{\triangledown\blacktriangledown}) = -(3\triangle P+e)X(0)-2(\triangle P+e)X(1) + (\triangle P-e)X(2) \quad (1)$$

となる。利益が生じているのは $X(2)$ だけであるために損益の合計額が正になるのは，

$$X(2)=X(0)+y(0),\ X(2)=X(1)+y(1)$$

のときであると考えられるが，このとき

$$X(0)>0,\ X(1)>0,\ X(2)>0,\ y(0)>0,\ y(1)>0,$$

$$X(0)=(X(2)-y(0))>0,\ X(1)=(X(2)-y(1))>0$$

の条件が存在し，$X(0)=(X(2)-y(1))$，$X(1)=(X(2)-y(1))$ を (1) に代入すれば，

$$\Pi(2B^{\triangledown}:1B^{\triangledown\blacktriangledown}) = -(3\triangle P+e)(X(2)-y(0)) -(2\triangle P+e)(X(2)-y(1))+(\triangle P-e)X(2)>0, \quad (2)$$

となるような正の整数 $X(0)$，$X(1)$，$X(2)$，$y(0)$，$y(1)$ が存在すれば，利益が生じることになる。

(2) を整理すれば

$$(3\triangle P+e)y(0)+(2\triangle P+e)y(1)>(4\triangle P+3e)X(2) \quad (3)$$

となるような正の整数 $X(2)$，$y(0)$，$y(1)$ が

$$(X(2)-y(0))>0,\ (X(2)-y(1))>0 \quad (4)$$

の条件のもとで存在すれば利益が生じることになる。

(3) を満足する $X(2)$, $y(0)$, $y(1)$ は多数存在すると考えられるが，$X(0)=X(1)>0$ のときに注目すれば，

$$X(0)=(X(2)-y(0))=X(1)=(X(2)-y(1))>0$$

より，

$$y(0)=y(1)>0,\ X(2)>y(0)$$

であり，$y(0)=y(1)$ を (3) に代入すれば，

$$(5\triangle P+2e)y(0)>(4\triangle P+3e)X(2) \tag{5}$$

となる。(5) の $X(2)>y(0)$ を満足する正の整数 $X(2)$, $y(0)$ は正の整数 $\alpha(0)$ によって，

$$X(2)=y(0)+\alpha(0),\ \alpha(0)>0$$

と表すことが可能であり，$X(2)=y(0)+\alpha(0)$ を (5) に代入すれば，

$$(\triangle P-e)y(0)>(4\triangle P+3e)\alpha(0) \tag{6}$$

であり，(F) を満足する正の整数 $y(0)$ と $\alpha(0)$ がすべて適正な値となる。

(6) を満足する正の整数 $y(0)$ と $\alpha(0)$ は $\triangle P$ と e の値によって異なるために，例えば価格変動幅の2分の1が手数料であるとき，すなわち $\triangle P=2e$ であれば，(6) は

$$y(0)>11\alpha(0) \tag{7}$$

の関係を有し，正の整数 $y(0)$ は正の整数 $\alpha(0)$ の11倍より大きな値でなければならない。

$\alpha(0)$ が最小値1のとき $y(0)$ の最小値は12であり，これ以上の値であれば (7) を満足する。$\alpha(0)=1$, $y(0)=12$ のとき $y(0)=y(1)=12$, $X(2)=y(0)+\alpha(0)$ より $X(2)=13$, $X(0)=X(1)=(X(2)-y(1))=13-12=1$ であり，$\triangle P=2e$ とこれらの値を (2) に代入すれば，

$$\Pi(2B^{\triangledown}:1B^{\triangledown\blacktriangledown})=e>0$$

となり，利益が発生している。

4－2. 3時点の価格上昇

同じ経路《5》で次の3時点に価格が上昇すれば，価格は（$P(0)-\triangle P$）となり1時点と同じ水準になる。このとき $B(0)$ と $A(2)$ には価格による評価損失が生じ，$B(1)$ は購入時と同じ価格で転売しても手数料分の損失が生じる。3時点には $A(3)$ か $B(3)$ かの購入を実施しなければらないが，4時点にも価格が上昇すれば価格は $P(0)$ となり0時点と同じ水準になる。このとき $A(2)$ には価格による評価損失が生じ，$B(0)$ は購入時と同じ価格で転売しても手数料分の損失が生じるが $B(1)$ にだけは（$P(0)-e)B(1)$ の利益が生じるために $A(3)$ と $B(3)$ のいずれを購入しても $B(1)$ の数量によっては損失を生じることなく4時点に売買を終了することができる。他方4時点に価格が低下すれば価格は（$P(0)-2\triangle P$）となり2時点と同じ水準になり $B(0)$ と $B(1)$ には価格による評価損失が生じ $A(2)$ には手数料分の損失が生じる。4時点に売買を終了することができるのは3時点に $A(3)$ を購入したときだけである。したがって経路《5》では3時点に価格が上昇すれば4時点に売買を終了することができるのは，①4時点に続いて価格が上昇したとき，②4時点に価格が低下したときは3時点に $A(3)$ を購入したとき，だけである。

4時点に価格が低下したとき3時点に $B(3)$ を購入していれば，どの時点の購入の売却も損失が生じるために，次の5時点の価格の動きを待たなければならないが，4時点の購入の選択と5時点の価格の動きによってはいつまでも評価損失を計上しながら売買を続けなければならない。また4時点や5時点に損失を生じることなく売買を終了するためには各時点の購入量に厳しい数量制限が伴う。したがって経路《5》のような経路のもとでは損失なく売買を終了することは極めて困難である。

4－3. 経路全般の評価

上記のように2時点までに0, 1, 2のすべての時点の購入が在庫として残る最悪の価格変動と売買方法選択の経路は22のうち8経路で36.4%，二つの時点の

購入が在庫として残る経路は《1》,《2》,《4》,《8》,《16》,《20》,《21》,《22》の 8 経路で 36.4 %である。一つの時点の購入が在庫として残る経路は《3》,《7》,《11》,《12》,《15》,《19》の 6 経路で 27.3 %であるが，このうち 0 と 1 の二つの時点の在庫が 2 時点に残らない最良の経路は《11》，《12》の 2 経路で 9.1 %である。

2 時点までに二つの時点以上の購入が在庫として残る経路は 22 のうち 16 で 72.7 %であり，購入量を調整しても多くの損失の発生を回避することは極めて困難である。このような先物売買の大きなリスクを緩和する一つの方法はオプションの付帯である。市場によってはオプション売買が実施されていないこともあるが，以下ではオプションの購入が可能であれば損失がどのように軽減されるかを検討する。

5. オプション付帯

オプションは商品を買いつける権利であるコール・オプションと売りつける権利であるプット・オプションに分類される。以下では商品先物の価格変動リスクを軽減するためにこれら 2 種類のオプションの購入効果を考える。コール・オプションは一定価格で一定期日までに商品を買いつける権利であるために t 時点に先物の売り予約を $A(t)$ 購入したさいに同じ水準の価格で $A(t)$ と同じ枚数の $C(t)$ を購入しておけば先物の決済期限までに価格が購入時以上に高騰したさいに差金決済で生じる損失をコール・オプションの権利行使で得る利益によって相殺することができる。プット・オプションは一定価格で一定期日までに商品を売りつける権利であるために t 時点に先物の買い予約を $B(t)$ 購入したさいに同じ水準の価格で $B(t)$ と同じ枚数の $D(t)$ を購入しておけば先物の決済期限までに価格が購入時以下に低下したさいに差金決済で生じる損失をプット・オプションの権利行使で得る利益によって相殺することができる。オプションの権利行使価格に対応する保険料であるオプション・プレミアムがどのような水準にあるかによって損失を相殺する程度も異なるが，以下では上記の経路についてオプション付帯の効果を一般的に検討する。

5−1. 最悪の経路へのオプション付帯

最悪の経路の一つである《5》にオプションを付帯すればどうであろうか。この経路へのオプション付帯の方法は多様であるが，ここでは売り予約へは同じ枚数分のコール・オプションを売り予約の価格と同じ権利行使価格で購入すると考える。先物とオプションの最長限月は異なることがあり，通常先物のほうが長いが，ここでは分析の明確化のために先物とオプションの限月が同じものを購入すると仮定する。なお市場では先物の限月は納会日，オプションの限月は満期日といわれ，オプションは先物の限月ごとに複数の権利行使価格すなわちオプション銘柄が設定され，各銘柄ごとにコールとプットのオプション相場が市場で成立し，このオプション相場がプレミアムである。オプションの設定日である発会日には一定数の権利行使価格で出発するが，その後先物価格の変動に応じて銘柄の数は増大して行く。

オプション・プレミアムは権利行使価格によって異なるが，0 時点に価格 $p(0)$ で先物を $B(0)$ 購入したさいにはその先物と同じ枚数のプット・オプションを $D(0)$ 枚オプション・プレミアム $D\lambda\{0,\ p(0)\}$ で購入する。$D\lambda\{0,\ p(0)\}$ は 0 時点に先物価格が $p(0)$ で限月内の権利行使価格が $p(0)$ であるプット・オプション一枚のプレミアムを表している。同様に $B(1)$ にはその先物と同じ価格 $p(1)=p(0)-\triangle p$ のプット・オプション $D(1)$ 枚をオプション・プレミアム $D\lambda\{1,\ p(0)-\triangle p\}$ で購入する。また $A(2)$ についてはその先物と同じ価格 $p(2)=p(0)-2\triangle p$ と同じ限月のコール・オプション $C(2)$ 枚をオプション・プレミアム $C\lambda\{2,\ p(0)-2\triangle p\}$ で購入する。これらのオプション付帯によって《5》のリスクはどのように軽減されるであろうか。

5−1−1. 先物とオプションの同時決済

0 時点に価格 $p(0)$ で購入した買い予約 $B(0)$ に $D(0)$ 枚のプット・オプションがプレミアム $D\lambda\{0,\ p(0)\}$ で付帯される。1 時点に価格が $\triangle p$ 低下し，1 時点が 0 時点に購入した先物とオプションの限月以前であれば，0 時点に購入した先物とオプションを処分するかどうかは投資家の判断であるが，ここではオプション売買の手

数料はオプション・プレミアムに含まれており，権利行使の費用は不要であると想定する。またオプションが付帯される原資産には現物と先物があるが，ここでは先物が原資産でありオプションは先物市場で売買されているとする。

0時点以後のt時点に価格が低下しプット・オプションから利益を得るためには先物市場で設定されているオプションであれば，①プット・オプションを市場で転売しオプション・プレミアムの上昇分を取得する，②プット・オプションを権利行使し，プット・オプションの買いポジションから先物の売りポジションに移行する，のいずれかの方法が可能であるが，①では価格が低下すればプット・オプションのプレミアムは$D\lambda\{0, p(0)\}$から$D\lambda\{t, p(0)\}$に上昇しているために

$$(D\lambda\{t, p(0)\} - D\lambda\{0, p(0)\}) > 0$$

の売買差益が，②では先物価格の低下分$(p(0) - p(t))$からプレミアムを差し引いた

$$(p(0) - p(t)) - D\lambda\{0, p(0)\} > 0$$

の評価益が発生する。もし①と②の両者に利益が生じるのに十分な先物価格やプレミアムの変化が生じていれば，②の権利行使ではプット・オプションの買いポジションから先物の売りポジションに移行するが，この移行は権利行使者について一般に，⑴新規に売りポジションを設定する，⑵すでに買いポジションを所有していれば，売りポジションの発生によって買いの転売となり，既存の買いポジションを決済することにより差金決済を行う，のいずれかが選択される。先物の買いにプット・オプションを付帯し権利を行使したときには⑵の差金決済の実行となる。権利行使による先物決済の手数料は先物の買いを独自に転売したときと同じ金額になり権利行使によって決済したとき追加的な売買費用は発生しない。

①と②のいずれを選択するかはt時点の市場の状況により，① ≧ ②となるのは

$$〔D\lambda\{t, p(0)\} - D\lambda\{0, p(0)\}〕 - \{(p(0) - p(t)) - D\lambda(0, p(0)) - e\}$$
$$= D\lambda\{t, p(0)\} - (p(0) - p(t) - e) \geqq 0,$$

すなわち

$$D\lambda\{t, p(0)\} \geqq (p(0) - p(t) - e) \tag{8}$$

のときで，①＜②となるのは

$$D\lambda\{t,\ p(0)\} < (p(0)-p(t)-e) \tag{9}$$

のときである。権利行使による先物決済では先物の売買手数料 e が評価益から差し引かれる。

両者の同時処分では，①オプションと先物の単独決済，②オプションの権利行使による先物の決済，のいずれかを選択しなければならないが，上記の経路《5》について 1 時点に先物とオプションを同時に処分したとき全体の収支はどのようになるであろうか。1 時点には価格が $\triangle p$ 低下するために先物の単独決済は $-B(0)(\triangle p+e)$ の損失，プット・オプションのプレミアムは $D\lambda\{1,\ p(0)\} > D\lambda\{0,\ p(0)\}$ となり利益が生じ，①の両者単独の売却と先物決済では，収支は

$$-B(0)(\triangle p+e)+D(0)\{D\lambda(1,\ p(0))\}-D\lambda(0,\ p(0)), \tag{10}$$

②のオプションの権利行使と先物の決済による収支は

$$-B(0)(e+D\lambda(0,\ p(0))) \tag{11}$$

となる。価格低下時には②は明らかに損失となるが，①が損失となるのは

$$-B(0)(\triangle p+e)+D(0)\{D\lambda(1,\ p(0))-D\lambda(0,\ p(0))\} < 0$$

のとき，すなわち $B(0)=D(0)$ であるために，

$$D\lambda(1,\ p(0)) < \triangle p+e+D\lambda(0,\ p(0)) \tag{12}$$

のときで，①に利益が発生すれば①が選択されるが①が損失になるときでも①と②のいずれが有利かは（10）と（11）の比較による。

経路《5》では 2 時点にも価格が低下するが，2 時点も限月内でこの時点に 0 時点に購入した先物とオプションをそれぞれ単独に処分すれば，②の収支は

$$-B(0)(2\triangle p+e)+D(0)\{D\lambda(2,\ p(0))-D\lambda(0,\ p(0))\}, \tag{13}$$

②のオプションの権利行使と先物の決済による収支は

$$-B(0)(e+D\lambda(0,\ p(0))) \tag{14}$$

となる。②は明らかに損失となるが，①が損失となるのは

$$-B(0)(2\triangle p+e)+D(0)\{D\lambda(2,\ p(0))-D\lambda(0,\ p(0))\} < 0$$

のとき，すなわち $B(0)=D(0)$ であるために，

$$D\lambda(2,\ p(0)) < 2\triangle p + e + D\lambda(0,\ p(0)) \tag{15}$$

のときで，①に利益が発生すれば①が選択されるが①が損失のとき①と②のいずれが有利かは（13）と（14）の比較による。

①の単独処分では1時点と2時点ではプレミアムの相場によって金額に差異が生じるが，②ではいずれの時点に処分しても（11）と（14）は同じ値になる。すなわち0時点に購入した先物とオプションを②の方法で決済すれば，以後どのような時点に決済しても損失は常に一定である。

5－1－2. 利益発生の可能性

①と②のいずれが有利かは市場の状況によって異なるが，②の選択にのみ注目すれば，価格がどのような水準になれば利益が発生するであろうか。価格の低下は常に損失となるために価格が上昇したある時点に利益が発生するが，その時点の価格を $(p(0)+\mu\triangle p)$ と表現する。このときプット・オプションの権利を行使すれば損失になるために権利を放棄しプレミアム分の損失が生じるが，もし0時点の購入分 $B(0)$ だけを処分すれば，収支は

$$\begin{aligned} &B(0)(\mu\triangle p - e) - D(0)D\lambda(0,\ p(0)) \\ &= B(0)\{\mu\triangle p - e - D\lambda(0,\ p(0))\} \end{aligned} \tag{16}$$

となる。この収支が利益となるためには

$$\mu\triangle p - e - D\lambda(0,\ p(0)) > 0,$$

すなわち

$$\mu\triangle p > e + D\lambda(0,\ p(0)) \tag{17}$$

でなければならず，売買可能な価格の上昇時点が整数の μ 回到来した時点である。

価格が $p(0)$ 以下の水準で推移し限月が到来し両者を同時に決済しなければならなくなれば，価格がどのように低い水準にあっても収支は常に

$$-B(0)(e + D\lambda(0,\ p(0))) \tag{18}$$

である。他方価格が $\triangle p$ 以上に上昇し $p(t)$ になれば，収支は

$$B(0)\{p(t)-p(0)-e\}-D(0)D\lambda(0,\ p(0))$$

となり，$-B(0)(e+D\lambda(0,p(0)))$ より値が大きくなるために，損失の減少や利益の発生となる。価格が限月までに一度でも（17）の水準になると予想すれば0時点に先物の買い $B(0)$ とプット・オプション $D(0)$ の買いを実行する。

上記では経路《5》の0時点の $B(0)$ だけに着目しているが他の時点の購入についてはどうであろうか。各時点の先物について同じ数のオプションを付帯すれば最悪となるのは1と2時点に価格が低下し，3時点以後価格が同じ水準で動かずすべての限月が順次に訪れるときで，最悪の収支は

$$-B(0)(e+D\lambda(0,\ p(0)))-B(1)(e+D\lambda(1,\ p(1)))$$
$$-A(2)(e+C\lambda(2,\ p(2))) \tag{19}$$

である。他方3時点以降 t 時点まで価格が $\mu\triangle p$ 分連続的に低下し，その後 t 時点の水準で動かずにすべての限月が順次到来すれば，収支は

$$-B(0)(e+D\lambda(0,\ p(0)))-B(1)(e+D\lambda(1,\ p(0)))$$
$$+A(2)(\mu\triangle p-e-C\lambda(2,\ p(2))) \tag{20}$$

となり（19）の最悪の収支よりは改善される。3時点以降 t 時点までの価格低下 $\mu\triangle p$ がかなり大きな値であり

$$A(2)\{u\triangle p-e-C\lambda(2,\ p(2))\}$$
$$>B(0)(e+D\lambda(0,\ p(0)))+B(1)(e+D\lambda(1,\ p(0))) \tag{21}$$

であれば，利益が発生する。すなわち最悪の経路《5》で価格が暴落してもオプションを付帯すれば大きな損失ではなくむしろ利益が生じる可能性がある。

5－2. 最良の経路へのオプション付帯

それでは最良の経路である《11》にオプションを付帯すればどうであろうか。《11》では0時点に $B(0)=D(0)$ のプット・オプションを付帯するために1時点に $\triangle p$ 価格が上昇し即座に両者を処分すれば収支は

$$B(0)\{\triangle p-e-D\lambda(0,\ p(0))\} \tag{22}$$

となる。オプションを付帯しなければ$B(0)(\triangle p-e)$の利益が生じるがオプション・プレミアム分の費用が生じ（11）が正にならなければ損失となる。通常$D\lambda(0, p(0))$は$(\triangle p-e)$より大きくなるために損失が生じる。1時点の$A(1)$にコール・オプションを付帯し2時点に両者を処分したときも同様である。したがってオプションを付帯すれば先物を単独に購入する場合とは状況が異なり，以後の適当な時点まで保有しなければならない。

3時点以降t時点まで価格が$\mu\triangle p$分連続的に低下し，その後t時点の水準で動かずにすべての限月が順次到来すればどうであろうか。そのとき収支は

$$-B(0)\{e+D\lambda(0, p(0))\}+A(1)\{(u+1)\triangle p-e$$
$$-C\lambda(1, p(1))\}-B(2)\{e+D\lambda(2, p(2))\} \tag{23}$$

となり，3時点以降t時点までの価格低下μ Δpがかなり大きな値であれば利益が生じる。

3時点以降t時点まで価格が$\mu\triangle p$分連続的に上昇し，その後t時点の水準で動かずにすべての限月が順次到来すればどうであろうか。そのとき収支は

$$B(0)\{\mu\triangle p-e-D\lambda(0, p(0))\}-A(1)\{e+C\lambda(1, p(1))\}$$
$$+B(2)\{\mu\triangle p-e-D\lambda(2, p(2))\} \tag{24}$$

となり，$\mu\triangle p$がかなり大きければ，$B(0)$と$B(2)$の利益は$A(1)$の損失を越える可能性が高い。（23）と比較すれば（24）は有利で，3時点以降価格が連続的に上昇してゆけば利益を確保する機会は大きくなる。

上記のように先物へのオプション付帯は目先的にはオプション・プレミアムによる損失が生じるが，長期的には大きな損失を回避し利益機会の可能性を拡大する。価格が大幅に変動する時期にはオプション付帯の価値は高くなり，プレミアムと価格変動幅の比較予想の正確さが収益に大きく影響する。損失の軽減と安定した先物売買のためにはオプション市場の正確な把握が必要である。

参考文献

Anthony, Joseph H., “The Interrelation of Stock and Options Market Trading-Volume Data”, Journal of Finance, 43 (1988), 949–64.

Ball, Clifford A. and Walter N. Torous, “Futures Options and the Volatility of Futures Prices”, Journal of Finance, 41 (1986), 857–70.

Bates, David S. “Post-’87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market”, Journal of Econometrics, 94 (2000), 181–238.

Boyle, Phelim P., “The Quality Option and Timing Option in Futures Contracts”, Journal of Finance, 44 (1989), 101–13.

Brenner, Menachem, Georges Courtadon, and Marti Subrahmanyam, “Options on the Spot and Options on Futures”, Journal of Finance, 40 (1985), 1303–17.

Broadie, Mark, Jérôme Detemple, Eric Ghysels, and Olivier Torrés, “American Options with Stochastic Dividends and Volatility: A Nonparametric Investigation”, Journal of Econometrics, 94 (2000), 53–92.

Doukas, John A, Chansog (Francis) Kim, and Christos Pantzalis, “A Test of the Errors-in-Expectations Explanation of the Value/Glamour Stock Returns Performance: Evidence from Analysts’ Forecasts”, Journal of Finance, 57 (2002), 2143–316.

Geske, Robert and Richard Roll, “On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula”, Journal of Finance, 39 (1984), 443–55.

Geske, Robert and H. E. Johnson, “The American Put Option Valued Analytically”, Journal of Finance, 39 (1984), 1511–24.

Hong, Harrison, “A Model of Returns and Trading in Futures Markets”, Journal of Finance, 55 (2000), 959–88.

Merton, Robert C., “Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later”, American Economic Review, 88 (1998), 323–49.

Najand, Mohammad, “Forecasting Stock Index Futures Price Volatility: Linear vs. Nonlinear Models”, Financial Review, 37 (2002), 93–104.

Vijh, Anand, M., “Liquidity of the CBOE Equity Options”, Journal of Finance, 45 (1990), 1157–79.

Wang, Changyun, “Information, Trading Demand, and Futures Price Volatility”, Financial Review, 37 (2002), 295–315.